Distributietheorie 11-8-'97

Tentamenopgave

I

1. Formuleer de sprongregel voor de afgeleide van bepaalde reguliere distributies op $\mathbb{R}$.

2. Bepaal met behulp hiervan de tweede afgeleide in de zin van de distributies van $|x|$.

II

1. Wat kan je zeggen van een distributie $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ met drager bevat in $\{0\}$?

2. Bereken voor p, q in $\mathbb{N}$ de distributie $x^p\delta^{(q)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Aanwijzing: Onderscheidt de gevallen $p > q$ en $p \leq q$.

III

1. Laat S en T distributies op $\mathbb{R}^n$ zijn. Geef aan wanneer S en T aan de convolutievoorwaarde voldoen, en definieer in dat geval het convolutieproduct $S * T$.

2. Zij S en T distributies op $\mathbb{R}^n$ die aan de convolutievoorwaarde voldoen. Toon aan dat voor alle $a \in \mathbb{R}^n$ de volgende formule geldig is:

$$e^{ax}S * e^{ax}T = e^{ax}(S * T)$$

Hier is $ax = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$.

IV

Beschouw de differentiaaloperator $D = (\frac{d}{dx})^2 + \frac{d}{dx} - 2$.

1. Bepaal de fundamentele oplossing van D behorend tot $\mathcal{D}'_+$.

2. Bepaal de oplossing $T \in \mathcal{D}'_+$ van de vergelijking $DT = Y$ (Y de Heaviside één-stap functie). Aanwijzing: dit kan ook met behulp van de symboolrekening.

3. Bepaal, m.b.v. de symboolrekening, de oplossing f van het volgende klassieke beginwaardeprobleem, waarbij g een continue functie op $\mathbb{R}$ is:

$$Df = g, f(0) = 1, f'(0) = 1$$

4. Wat is de oplossing wanneer $g = 1$?